УДК 336.012.23

Віталій НОВІКОВ
професор, доктор фізико-математичних наук,
Одеський національний політехнічний університет

Світлана ФІЛІППОВА
професор, доктор економічних наук,
Одеський національний політехнічний університет

Оксана МОВЧАНЮК
Одеський національний політехнічний університет

ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ФІНАНСОВИХ ІНДЕКСІВ

У роботі запропоновано метод прогнозування фінансових індексів на основі обчислення статистичних оцінок логнормального розподілу. Здійснено аналіз залежності індексу Доу-Джонса з початку 1928 до кінця 2009 року.

Ключові слова: *середнє значення, дисперсія, фрактальна множина, фінансові індекси, логнормальний розподіл, часові ряди.*

У фінансових індексах міститься глобальна інформація про стан фінансового ринку [1]. Найбільш відомим фінансовим індексом є індекс Доу-Джонса (Dow - Jones).

Було накопичено багато фактів, що свідчать про те, що фінансові індекси не підпадають нормальному розподілу. У своїх роботах Б. Мальденброт і Е. Фама [1, 2] показали, що фінансові індекси описуються фрактальними моделями, тобто описуються розподілами з "важкими хвостами" [1].

На початку 1990-х років була розроблена нова модель - «гіпотеза фрактального ринку» - FMH, яка створювалася як альтернатива до «гіпотези ефективного ринку» (EMH) [3].

Складність поведінки курсів цінних паперів, що обертаються на ризикованому та нестабільному фінансовому ринку, стимулює залучення до їх аналізу різних математичних методів і, зокрема розроблених у теоретичній фізиці.

Логнормальний розподіл використовується як перше наближення для опису відносного вимірювання фінансових індексів. Це обумовлено тим, що нормальний розподіл симетричний щодо її центральної вісі і може мати як позитивні, так і негативні значення, у той час як ціна активу (значення фінансового індекса) не може бути негативною.

Крива логнормального розподілу завжди позитивна і має правосторонню скошеність. Прийнято вважати, що логнормальний розподіл досить добре описує фінансові індекси як перше наближення для довгих періодів.

У даній роботі передбачається, що фінансовий ринок має фрактальні властивості, і у своїй основі визначається нелінійними процесами, а саме узагальненим броунівським рухом, скейлінгом і довгостроковою пам'яттю, тобто підпорядковується постулатам одного із напрямків нелінійної економічної теорії - гіпотезі фрактального ринку [1].

До сьогоднішнього часу не з'ясований зв'язок між фрактальними властивостями фінансового ринку і логнормальным розподілом фінансових індексів. Цій задачі і присвячена наша робота.

У статті запропоновано метод прогнозування фінансових індексів на основі обчислення статистичних оцінок фрактальної розмірності часових рядів, що дозволяє, на відміну від стандартних методів, врахувати нелінійні залежності часових рядів фінансових індексів.

Часові ряди. Якщо $S_t = S(t)$ значення фінансового індексу - деяка випадкова функція часу t, тоді за малий проміжок часу Δt випадкова функція зміниться на

$$\Delta S_t = S(t+\Delta t) - S(t) \tag{1}$$

Зазвичай при описі динаміки фінансового індексу на фінансовому ринку $S_n = \{S_n\}$ припускають їх стохастичну природу і розглядають логарифм відносини

$$x_n = \ln \frac{S_{n+1}}{S_n}, \tag{2}$$

де S_n - значення ціни в момент часу t ($t = n\Delta t, \Delta t = 1$), а $S_n = S_n(t), x_n = x_n(t)$ є випадковими величинами.

Відзначимо, що випадковість - це відсутність закономірностей, невідтворюваність, некерованість випадкової величини. Величина $S_t = S(t)$ називається випадковою, якщо вона задана своїми ймовірнісними розподілами.

Вираз для x_i (1) розділимо на дві частини: середнє значення $< x_i >$ і випадкову величину η_i, що підпорядковується шуканому статистичному розподілу з нульовим середнім значенням:

$$x_i = < x > + \eta_i \tag{3}$$

Основним показником фінансового індексу x_i є проста його волатильність $\sigma(t)$, яка є середньоквадратичним відхиленням дохідності x_i фінансового активу, обчислена на основі N торгових періодів:

$$\sigma(t) = \sqrt{\sum_i \frac{(x(t) - \bar{x})^2}{N-1}}, \text{ де } x(t) = \ln\left(\frac{S(t+\tau)}{S(t)}\right) \tag{4}$$

Якби розподіл фінансового індексу підкорявся нормальному розподілу, то знання волатильності $\sigma(t)$, яка вимірюється на часовому періоді t, давало б значення волатильності на часовому періоді T за формулою

$$\sigma(T) = \sigma(\tau) \cdot \sqrt{T/t} \tag{5}$$

Так, волатильність у розрахунку на рік дорівнює

$$\sigma_{год}(T)=\sigma_{день}\cdot\sqrt{251}, \quad (6)$$

де 251 - число робочих днів на фінансовому ринку на рік, а $\sigma_{день}$ - денна волатильність.

Розглянемо значення найбільш популярного на фінансовому ринку індексу Доу-Джонса $S(t)$ у період з початку 1928 до жовтня 2009 року з кроком $\Delta t =$ 1 місяць (рис. 1).

Для зручності аналізу часового ряду (масиву значень ($S(t)$) всі значення індексу були розділені на 1000.

Основні характеристики випадкової величини індексу Доу-Джонса *S (t)* представлені в табл. 1.

Гістограма масиву ($S(t)$) є графічним зображенням залежності частоти попадання значень $S(t)$ в інтервали угрупування, тобто гістограма є частково-постійною функцією $h(x)$, що має вигляд:

$$\widetilde{h}(S)=n_i \qquad S_i\in(S_{i-1},S_i) \qquad i=1,2,\ldots,k \quad , \quad (7)$$

де n_i кількість елементів вибірки, що потрапили в і-й інтервал значень індексу $S\in(S_{i-1},S_i)$.

Функція $h(S)$, що задається рівністю $h(S)=n_i/n\Delta S_i$ $\Delta S_i = S_i - S_{i-1}$ $S\in(S_{i-1},S_i)$ $i=1,2,\ldots,k$, називається нормалізованою гістограмою. Нормалізована гістограма є щільністю ймовірності випадкової величини *S (t).*

На рис. 2 подано нормалізовану гістограму масиву *S(t)* і порівняння її з функцією логнормального розподілу при обчислених параметрах розподілу μ,σ .

Відповідно до проведених порівнянь розрахунку і експериментальних даних фінансового індексу $S(t)$, можна зробити висновок, що логнормальний розподіл досить добре описує масив значень $S(t)$ (краще ніж нормальний розподіл).

На рис. 3 представлена залежність $x(t)=\lg[S(t+\Delta t)/S(t)]$, яка свідчить про хаотичну природу зворотніх значень фінансового індексу $x(t)$.

Основні характеристики випадкової величини *x (t)* подано у табл. 2.

Для подальшого аналізу весь масив (*x(t)*) був розбитий на кластери, розмір часових інтервалів яких визначався як $t_n = 2^n$.

На рис. 4 подано залежності статистичних характеристик $\mu=<x(t_n)>$ і $\sigma=\sigma(t_n)$ від номера кластеру n ($n=\lg t_n/\lg 2$, які показують характерну фрактальну поведінку [5], а саме лінійну логарифмічну залежність $x(t)=\lg[S(t+\Delta t)/S(t)]$ статистичних характеристик $\mu=<x(t_n)>$ і $\sigma=\sigma(t_n)$ від номера ітерації n (часового інтервалу).

Таким чином, проведений аналіз залежності індексу Доу-Джонса *S (t)* у період з початку 1928 до жовтня 2009 року з допомогою логнормального розподілу. Показано, що часовий ряд фінансового індексу *S (t)* представляє собою фрактальну множину з характерними скейлінговими залежностями.

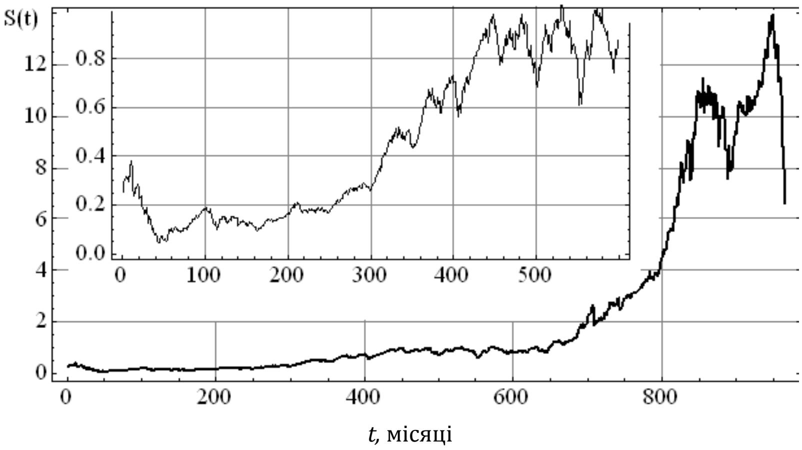

Рис. 1. **Значення найбільш популярного на фінансовому ринку індексу Доу-Джонса** $S(t)$ **у період з 1928 до 2009 рр.**

Таблиця 1. **Основні характеристики випадкової величини індексу Доу-Джонса *S (t)***

Довжина часового ряду*S(t)* дорівнює $n=966$
Середнє значення $<S(t)>$ =2,3541
Дисперсія массиву *{ S(t) } (Variance[S(t)])* D = 12,3614
Стандартне відхилення массиву *{ S(t) }* $\sigma=\sqrt{D}$ = 3,51587
Асиметрія масиву *S(t) (Skewness[S(t)]) A*= 1,77084
Ексцес масиву { *S(t) }(Kurtosis[S(t)]*) *E* = 2,40207
Максимальний елемент масиву { *S(t)* }: *Max[S(t)]*= 13,93
Мінімальний елемент масиву { *S(t)* }: *Min[S(t)]*= 0,043
Розмах масиву { *S(t)* }: *R= Max[S(t)] - Min[S(t)]*= 13,887

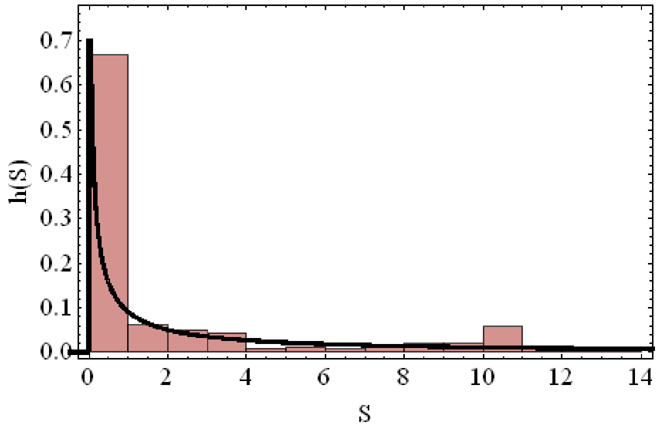

Рис. 2. **Нормалізована гістограма масиву S(t) і порівняння її з функцією логнормального розподілу при обчислених параметрах розподілу μ, σ.**

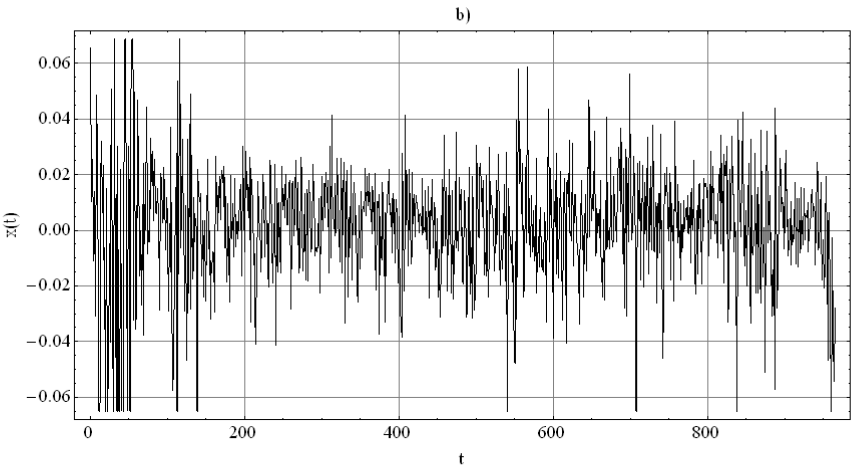

Рис. 3. **Залежність** $x(t) = \lg[S(t+\Delta t)/S(t)]$**, яка вказує на хаотичну природу зворотніх значень фінансового індексу** $x(t)$**.**

Таблиця 2. **Основні характеристики випадкової величини x (t)**

Довжина часового ряду *x(t)* дорівнює $n = 965$
Середнє значення $< x(t) >$ =*Mean[x(t)]*= 0,00147142
Дисперсія масиву*{ x(t) }(Variance) D* = 0,000556633
Стандартне відхилення*{ x(t) }* $\sigma = \sqrt{D}$ = 0,0235931
Асиметрія массиву *x(t) (Skewness) A*= -0,783997
Ексцес массиву *{ x(t) }(Kurtosis) E*= 9,80478
Максимальний елемент масиву*{ x(t) }: Max[x(t)]*= 0,130929
Мінімальний елемент масиву*{ x(t) }: Min[x(t)]*= -0,156243
Розмах масиву{ *x(t) }: R= Max[x(t)] - Min[x(t)]*= 0,287172

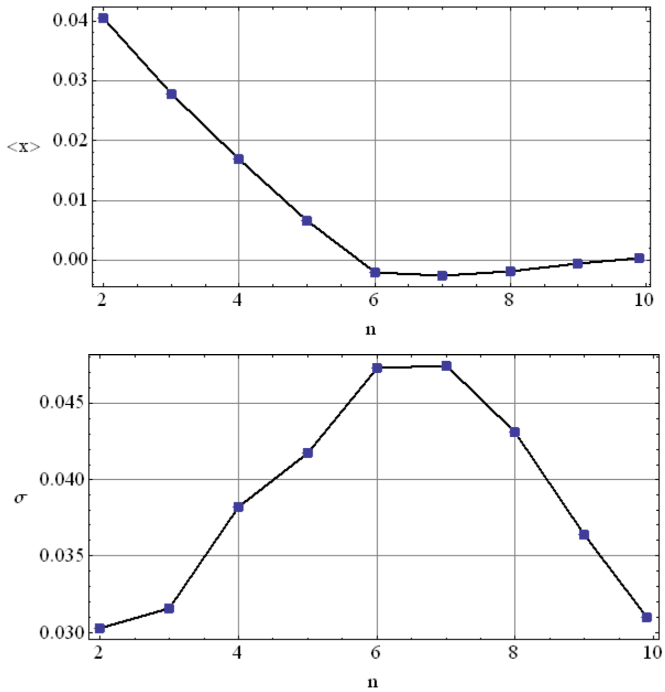

Рис. 4. **Залежність статистичних характеристик** $\mu =< x(t_n) >$ **і** $\sigma = \sigma(t_n)$

від номера кластеру n **(** $n = \lg t_n / \lg 2$ **, які показують характерну фрактальну поведінку**

Список літератури

1. *Fama. E. F., Miller M. H., The Theory of Finance. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1972.*
2. *Frame, M. and Mandelbrot, B.B., Fractals, Graphics and Mathematics Education. Mathematical Association of America and Cambridge University Press, 2002*
3. *Peters. E. Fractal Market Analysis. Applying Chaos Theory to Investment & Economics. J. Wiley & Sons, New York, 1994.*
4. *Novikov, V. V. Physical properties of fractal structures, p.93-284. In the book "Advances in Chemical Physics, Volume 133, Fractals, Diffusion and Relaxation in Disordered Complex Systems"(J. Wiley, Chichester-New York-Brisbane-Toronto-Singapore, 2006).*

РЕЗЮМЕ

Новиков Виталий, Филиппова Светлана, Мовчанюк Оксана

Фрактальные свойства финансовых индексов

В работе предложен метод прогнозирования финансовых индексов на основе вычисления статистических оценок логнормального распределения.

Проведено анализ зависимости индекса Доу-Джонса с 1928 до конца 2009 года.

RESUME

Novikov Vitaliy, Filippova Svitlana, Movchanyuk Oksana

The Fractal properties of financial indexes

The technique for forecasting of financial indexes based of an evaluation for statistical estimations of logarithmically normal distribution is offered. The analysis of dependence for Dow – Johns index during the period from 1928 till the end of 2009 is carried out.